Глава 3

Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений

Данный семинар посвящен методам численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Рассмотрим методы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) вида

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)). \tag{3.1}$$

с заданными начальными условиями $y(0) = y_0$ (т.н. *задача Коши*). Функции y и f могут быть заданы векторами

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_m(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(n-1)}(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1(t), \dots, y_m(t), y_1'(t), \dots, y_m^{(n-1)}(t)) \\ f_1(t, y_1(t), \dots, y_m(t), y_1'(t), \dots, y_m^{(n-1)}(t)) \\ \dots \\ f_1(t, y_1(t), \dots, y_m(t), y_1'(t), \dots, y_m^{(n-1)}(t)) \end{pmatrix}$$

приводя к системе ОДУ:

$$\mathbf{y}^{(n)}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(n-1)}(t)).$$

Для дальнейшего рассмотрения существенным является факт, что любое ОДУ произвольной степени может быть сведено к *эквивалентной* системе ОДУ первого порядка. Например, мы можем преобразовать систему ОДУ, состоящую из 3-х ОДУ второго порядка, к системе 6-ти ОДУ первого порядка.

Пример.Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u'''(t) = -u'(t)u^2(t) + \sin t,$$
$$u(0) = -1, \quad u'(0) = 1, \quad u''(0) = 2.$$

Она может быть сведена путем замены переменных

$$y_1 = u, \quad y_2 = u', \quad y_3 = u''$$

к следующей системе ОДУ первого порядка:

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = y3, \quad y_3' = -y_2 y_1^2 + \sin t,$$
$$y_1(0) = -1, \quad y_2(0) = 1, \quad y_3(0) = 2.$$

Эта система может быть также записана в матричной форме:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1, y_2, y_3) \\ f_2(t, y_1, y_2, y_3) \\ f_3(t, y_1, y_2, y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ -y_2 y_1^2 + \sin t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

как было описано выше □

3.1 Численное дифференцирование ОДУ

Поскольку ОДУ произвольной степени может быть сведено к системе ОДУ первого порядка, мы ограничимся в дальнейшем только решением ОДУ первого порядка. Более того, чтобы упростить задачу, будем рассматривать одномерный случай:

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)), \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Несмотря на введенные ограничения, все методы, которые мы будем рассматривать, работают и для систем ОДУ.

Мы предполагаем, что функция f является гладкой функцией и будем игнорировать случаи, когда решение уравнения, возможно, не единственное или расходится на ограниченном времени. Такие случаи требуют специального анализа.

Методы численного интегрирования ОДУ, рассматриваемые на данном и следующем семинарах, используют последовательный расчет значений $y(t)$, начиная с $y(t_0 = 0)$, затем $y(t_1 > t_0)$ и т.д. Все они относятся к одному из двух классов:

- Методы, использующие разложение в ряд Тейлора;
- Методы Рунге—Кутты.

3.1.1 Ошибки методов

Говоря об ошибках методов численного интегрирования ОДУ, мы должны различать т.н. локальную и глобальную ошибки. *Локальной ошибкой* называется ошибка вычислений на одном шаге метода, от t_{n-1} до t_n. *Глобальная ошибка* на данном шаге является суммарной ошибкой за все предыдущие шаги.

Обозначим решение уравнения (3.2) как $y(t)$, а его значение в точке t_n как $y(t_n)$. Численное решение (3.2) в точке t_n обозначим как y_n. Очевидно, что в начальный момент времени $y(t_0) = y_0$.

Глобальная ошибка E_n в точке t_n вычисляется как

$$E_n = y(t_n) - y_n. \tag{3.3}$$

Для вычисления локальной ошибки e_n в точке t_n необходимо “забыть” о предыдущих результатах вычислений до момента времени t_{n-1} и начать решать ОДУ с этой точки. Пусть $z(t)$ есть искомое решение, которое удовлетворяет

$$z'(t) = f(t, z(t)),$$
$$z(t_{k-1}) = y_{k-1}.$$

тогда локальная ошибка e_n в точке t_n определяется как

$$e_n = z(t_n) - y_n. \tag{3.4}$$

Пример. Рассмотрим уравнение $y' = y$. Его решением является семейство кривых вида

$$y(t) = c\,\mathrm{e}^t,$$

где c — произвольная константа. Решая уравнение численно, мы на каждом шаге отклоняемся от той кривой, с которой начали (из-за ошибок вычислений и погрешности используемого метода), и оказываемся на соседней кривой семейства с другим значением c. Локальная ошибка как раз и определяется этой разницей между двумя последними кривыми. Глобальная-же ошибка определяется разницей между начальной и конечной кривыми и может быть весьма существенна
□

3.2 Метод Эйлера

Рассмотрим численное решение задачи Коши

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \tag{3.5}$$

для последовательности точек $t_0, t_1, t_2, \dots$, которые будем считать для простоты расположенными эквидистантно с шагом h, так что

$$t_n = t_0 + hn.$$

Предположим также, что $y(t)$ является гладкой функцией и может быть разложена в ряд Тейлора:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + \cdots .$$

Если мы оборвем ряд Тейлора в определенной точке, мы получим метод численного интегрирования с использованием ряда Тейлора, который мы обсудим в дальнейшем. В этом же разделе мы рассмотрим простейший случай.

Если мы оборвем ряд Тейлора после второго члена разложения, мы получим т.н. *метод Эйлера*, который записывается в виде:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n = y_n + hf(t_n, y_n). \tag{3.6}$$

Пример. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$y'(t) = -2ty^2(t), \quad y(0) = 1,$$

имеющую точное решение

$$y(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Решим исходное уравнение численно, используя в расчетах шаг $h = 0,5$:

$$\begin{array}{ll}
t_0 = 0 & y_0 = 1 \\
t_1 = 0,5 & y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = 1 + 0,5(-2 \cdot 0 \cdot 1^2) = 1 \\
t_2 = 1 & y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = 1 + 0,5(-2 \cdot 0,5 \cdot 1^2) = 0,5 \\
t_3 = 1,5 & y_3 = 0,25 \\
t_4 = 2 & y_4 = 0,15625.
\end{array}$$

Точное значение $y(2) = 0,2$, так что глобальная ошибка в точке $t = 2$ есть $E_4 = 0,04375$.

Решая то же уравнение с шагом $h = 0,25$, получим:

$$\begin{array}{ll}
t_0 = 0 & y_0 = 1 \\
t_1 = 0,25 & y_1 = 1 \\
t_2 = 0,5 & y_2 = 0,875 \\
\dots & \dots \\
t_4 = 1 & y_4 = 0,508356094 \\
\dots & \dots \\
t_8 = 2 & y_8 = 0,181628009.
\end{array}$$

Глобальная ошибка в той же точке $t = 2$ теперь равна $E_8 = 0,018371991$.

Уменьшая шаг еще вдвое ($h = 0,125$), получим:

$$\begin{array}{ll}
t_0 = 0 & y_0 = 1 \\
\dots & \dots \\
t_8 = 1 & y_8 = 0,504548613 \\
\dots & \dots \\
t_{16} = 2 & y_{16} = 0,191547485.
\end{array}$$

Глобальная ошибка в точке $t = 2$ теперь равна $E_{16} = 0.008452515$.

Анализируя поведение глобальной ошибки при уменьшении шага, можно заметить, что при уменьшении шага вдвое глобальная ошибка также уменьшается примерно вдвое. Мы рассмотрим эту зависимость в следующем разделе □

3.3 Точность и устойчивость численного решения

3.3.1 Точность

В этом разделе мы исследуем локальную и глобальную ошибки метода Эйлера.

Начнем с оценки *локальной ошибки* метода. Для этого разложим функцию $z(t)$ в ряд Тейлора в точке t_{n-1} и оценим ее значение в точке t_n:

$$\begin{aligned}
z(t_n) &= z(t_{n-1}) + hz'(t_{n-1}) + \frac{h^2}{2}z''(t_{n-1}) + \dots \\
&= y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{h^2}{2}z''(t_{n-1}) + \dots .
\end{aligned}$$

Вычитая из этого разложения

$$y_n = y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1}),$$

получаем оценку для локальной ошибки

$$e_n = z(t_n) - y_n = \frac{h^2}{2} z''(t_{n-1}) + \ldots = O(h^2). \tag{3.7}$$

Теперь оценим грубо *глобальную ошибку метода*. Будем считать, что глобальная ошибка метода в точке t есть сумма всех локальных ошибок вплоть до этой точки. Для достижения точки t требуется сделать $(t - t_0)/h$ шагов и на каждом шаге локальная ошибка есть $O(h^2)$, так что оценка глобальной ошибки есть просто $O(h)$. Это, конечно-же не математическое доказательство, однако такая оценка оправдана.

Обычно говорят, что метод численного интегрирования ОДУ является *методом порядка p*, если

$$\begin{aligned} \text{локальная ошибка} &= O(h^{p+1}), \\ \text{глобальная ошибка} &= O(h^p). \end{aligned}$$

Заметим, что мы можем экспериментально определить порядок метода, интегрируя ОДУ сначала с шагом h, а затем с шагом $h/2$. В этом случае для метода первого порядка, например, ошибка должна уменьшиться вдвое, для метода второго порядка — вчетверо, и т.д. [1]

Более точная оценка глобальной ошибки метода Эйлера дает:

$$\begin{aligned} E_{n+1} &= y(t_{n+1}) - y_{n+1} \\ &= \left[y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + O(h^2)\right] - [y_n + f(t_n, y_n)] \\ &= (y(t_n) - y_n) + h\left[f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y_n)\right] + O(h^2) \\ &\approx E_n + h\frac{\partial f}{\partial y}[y(t_n) - y_n] + O(h^2) \\ &\approx (1 + h\lambda)E_n + O(h^2), \end{aligned}$$

где мы полагаем, что производная функции f по y равна приблизительно некоторой константе λ. Окончательно, имеем следующую оценку для глобальной ошибки:

$$E_{n+1} \approx (1 + h\lambda)E_n + O(h^2). \tag{3.8}$$

Интерпретация этой формулы следующая: новая глобальная ошибка E_{n+1} есть сумма старой глобальной ошибки E_n и новой локальной ошибки $O(h^2)$. Если $|1 + h\lambda| > 1$, глобальная ошибка будет возрастать экспоненциально. В противном случае, при $|1 + h\lambda| < 1$, глобальная ошибка остается малой.

Рекурсивное уравнение (3.8) для E_n может быть разрешено в замкнутой форме и дает

$$E_n = O(h). \tag{3.9}$$

[1] На практике это не всегда так и причина кроется в том, что геометрия семейства кривых решения также играет роль при оценке ошибки. Однако, если мы будем последовательно уменьшать шаг h, мы рано или поздно увидим описываемое поведение ошибки с уменьшением шага.

3.3.2 Устойчивость

Численный метод интегрирования ОДУ называется *устойчивым* (при заданном шаге h и для определенного λ), если численное интегрирование уравнения

$$y'(t) = \lambda y(t) \tag{3.10}$$

остается ограниченным при $t \to \infty$.

Сделаем несколько замечаний относительного этого определения:

- Устойчивость численного метода отличается от его точности. Ошибка метода, особенно его относительная ошибка, может быть достаточно большой, но решение будет, тем не менее, ограниченным.

- В основном, мы интересуемся случаем $\lambda < 0$. Если $\lambda > 0$, решение уравнения само по себе не ограничено и мы ожидаем того же и для численного решения. Поэтому, мы интересуемся случаем комплексных значений λ с отрицательным значением вещественной его части (например, экспоненциально затухающий осциллирующий сигнал).

- Устойчивость зависит от шага h и значения λ. Таким образом, метод может быть устойчивым для одних значений h, λ и не быть таковым для других значений. На практике, устойчивость всегда зависит от произведения $h\lambda$, а не по отдельности от h и λ.

Проанализируем устойчивость метода Эйлера. Для него уравнение (3.10) сводится к

$$y_{n+1} = (1 + h\lambda)y_n.$$

Метод является устойчивым при $|1 + h\lambda| \leq 1$, т.е. при

$$-2 \leq h\lambda \leq 0.$$

Область устойчивости метода определяется как набор всех возможных значений $h\lambda$, при которых метод стабилен. Таким образом, область устойчивости определена в общем случае на комплексной плоскости.

Пример. Проинтегрируем численно уравнение

$$y' = -y, \quad y(0) = 1$$

методом Эйлера с шагом $h = 0,5$ и $h = 3$. Результаты такого интегрирования приведены ниже:

	h=0,5	$h = 3$
y_0	1	1
y_1	$0,5$	-2
y_2	$0,25$	4
y_3	$0,125$	-8
y_4	$0,0625$	16

Очевидно, что нашего примера метод Эйлера устойчив при шаге $h = 0,5$ и неустойчив при $h = 3$
□

3.4 Задание для практической работы

Рассмотрим колебания гармонического осциллятора при наличии сил трения, которые приводят к затуханию колебаний. Детально физика гармонических и затухающих колебаний описана, например, в [8].

Напомним, что уравнение гармонических колебаний имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{3.11}$$

где $\omega^2 > 0$ — частота гармонических колебаний. Для осциллятора с возвращающей силой, подчиняющейся линейному закону Гука ($F = -kx$, где k — коэффициент упругости), частота собственных колебаний $\omega^2 = k/m$, где m — масса осциллятора. Энергия гармонического осциллятора сохраняется и на фазовой плоскости импульс—координата, $\{p, x\}$, траектория движения осциллятора представляет собой замкнутый эллипс или окружность (в зависимости от параметров задачи).

Рассмотрим колебания гармонического осциллятора (3.11) при наличии статического и сухого трения. При этом уравнение колебаний принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x + \varkappa \frac{dx/dt}{|dx/dt|} - \frac{F_s}{m} = 0, \tag{3.12}$$

где, как и раньше, $\omega^2 = k/m$, а $\varkappa = \eta/m$ — коэффициент сухого трения и $F_s \le C$ — сила статического трения. Зададим, для определенности, следующие параметры задачи: $m = 1$ кг, $k = 3$ Н м$^{-1}$, $\eta = 0,5$ Н, и $C = 1$ Н.

Сила сухого трения приводит к затуханию колебаний осциллятора. При этом траектория осциллятора на фазовой плоскости должна отражать потерю энергии в системе и выглядеть как сворачивающаяся спираль. Действие силы статического трения сводится к тому, что при нулевой скорости осциллятора ($dx/dt = 0$) должно выполняться соотношение

$$\omega^2 m|x| > C.$$

В противном случае, масса m останется в покое за счет силы статического трения. Для заданных выше параметров задачи осциллятор должен остаться в покое при $dx/dt = 0$ и $|x| \le 0,333$ м.

Задание состоит в том, чтобы исследовать численно с использованием метода Эйлера поведение гармонического осциллятора при наличии сухого и статического трения (см. уравнение (3.12)) при заданных выше параметрах m, k, $\varkappa$, η, и C и различных начальных условиях (задача Коши). Необходимо предусмотреть интерактивный ввод параметров задачи, ее начальных условий, временного диапазона интегрирования и требуемой точности вычислений (см. определение глобальной и локальной точности метода Эйлера выше). Программа должна достигать заданной точности вычислений и выводить на экран наряду с параметрами метода Эйлера, при которых такая точность достигается, графики зависимости $x(t)$ и траекторию движения осциллятора на фазовой плоскости. Нужно также предусмотреть возможность вычислений с заданным шагом интегрирования.

Для применения метода Эйлера необходимо сначала свести ОДУ второго порядка для осциллятора к двум ОДУ первого порядка путем замены переменных:

$$y_1(t) = x(t), \quad y_2(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

при такой замене переменных уравнение (3.12) сводится к системе ОДУ

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = f(y_1, y_2, t),$$

где

$$f(y_1, y_2, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } y_2(t) = 0 \text{ и } |y_1(t)| \le \frac{C}{k}, \\ -\omega^2 y_1(t) - \varkappa \frac{y_2(t)}{|y_2(t)|}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

К этой системе уравнений вместе с начальными условиями (задача Коши) мы уже можем применить метод Эйлера численного интегрирования ОДУ.

Упражнение 1

Исследуйте устойчивость метода Эйлера, варьируя в расчетах шаг интегрирования h. Где находится область его устойчивости? Что происходит с решением вне этой области?

Упражнение 2

Выполните эксперименты для различных начальных значений. Как влияет сила сухого трения на колебания? Какова роль статического трения? В какой точке происходит остановка осциллятора?

Упражнение 3

Определите период колебаний затухающего осциллятора. Влияет ли сухое трение на период колебаний? Объясните результаты.

Литература

[1] Р. П. Федоренко, *Введение в вычислительную физику*. — М.: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1994.

[2] Х. Гулд, Я. Тоболчик, *Компьютерное моделирование в физике*. В 2-х частях. Пер. с англ. — М.: Мир, 1990.

[3] Д. В. Хеерман, *Методы компьютерного эксперимента в теоретической физике*. Пер. с англ. — М.: Наука, 1990.

[4] К. Биндер, Д. В. Хеерман, *Моделирование методом Монте-Карло в статистической физике*. Пер. с англ. — М.: Наука, 1995.

[5] Н. С. Бахвалов, *Численные методы*. — М.: Наука, 1975.

[6] Н. Н. Калиткин, *Численные методы*. — М.: Наука, 1978.

[7] Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. — М.: Физматгиз, 1968.

[8] А. Н. Матвеев, *Механика и теория относительности*. — М.: Высш. шк. 1986.