Уравнение Пуассона

Постановка задачи:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = -f(x_1, x_2)$$

Рассмотрим его решение в прямоугольнике $0 < x_1 < l_1,\ 0 < x_2 < l_2$ с граничными условиями $U|_\Gamma = \mu(x)$

Такая система носит название ***задачи Дирихле*** с краевыми условиями 1-го рода.

1) Разностная схема «Крест»

Введём сетку:

$x_i = \{i_1 h_1,\ i_2 h_2\};\ i_\alpha = 0 \ldots N_\alpha\ (\alpha = 1, 2)$. Тогда $U_i = U_{i_1 i_2} = U(i_1 h_1,\ i_2 h_2)$

Аппроксимируем производные выражениями

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \sim \frac{u(x_1 - h_1, x_2) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1 + h_1, x_2)}{h_1^2} = u_{\bar{x}_1 x_1},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \sim \frac{u(x_1, x_2 - h_2) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1, x_2 + h_2)}{h_2^2} = u_{\bar{x}_2 x_2},$$

В результате получаем разностную задачу

$$\underbrace{\frac{y(i_1 - 1, i_2) - 2y(i_1, i_2) + y(i_1 + 1, i_2)}{h_1^2} + \frac{y(i_1, i_2 - 1) - 2y(i_1, i_2) + y(i_1, i_2 + 1)}{h_2^2}}_{\Lambda y(i,j)} = -f(i_1, i_2)$$

или, в сокращенной записи,

$$y_{\bar{x}_1 x_1}(i_1, i_2) + y_{\bar{x}_2 x_2}(i_1, i_2) = -f(i_1, i_2).$$

Разностное уравнение записано на пятиточечном шаблоне:

	i_1-1	i_1	i_1+1
i_2-1		X	
i_2	**X**	X	X
i_2+1		X	

Если $h_1=h_2=h$ (*квадратная сетка*), то

$$U(i, j) = \frac{1}{4}[U(i-1, j) + U(i+1, j) + U(i, j-1) + U(i, j+1)] + \frac{h^2}{4} f(i, j)$$

Заметим, что при $f=0$ значение функции в центре шаблона есть среднее арифметическое её значений в остальных узлах.

<u>Исследуем погрешность аппроксимации:</u>

Пусть u-точное решение задачи Дирихле, а y-разностной задачи. Введём погрешность $z=y-u$. Подставим $y=z+y$ в разностное ур-е:

$\Lambda z(i, j) = -\psi(i, j)$, где $\psi(i, j) = \Lambda u_{ij} + f_{ij}$ суть *невязка* или погрешность аппроксимации.

Покажем, что $\boxed{|\psi| \leqslant M_4 \frac{h_1^2 + h_2^2}{24},}$ где $M_4 = \max\limits_{x \in G}\left(\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}\right|, \left|\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}\right|\right).$

То есть покажем, что схема имеет **второй порядок аппроксимации**

$$u(x_1 \pm h_1, x_2) = u(x_1, x_2) \pm h_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) +$$
$$+ \frac{h_1^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) \pm \frac{h_1^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}(x_1, x_2) +$$
$$+ \frac{h_1^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}(\bar{x}_1, x_2), \quad \bar{x}_1 = x_1 + \theta_1 h_1, \quad 0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1,$$

$$u(x_1, x_2 \pm h_2) = u(x_1, x_2) \pm h_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) + \frac{h_2^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \pm$$
$$\pm \frac{h_2^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}(x_1, x_2) + \frac{h_2^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}(x_1, \bar{x}_2), \quad \bar{x}_2 = x_2 + \theta_2 h_2,$$
$$0 \leqslant \theta_2 \leqslant 1,$$

находим

$$\psi = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - f(x)\right) + \frac{h_1^2}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}(\bar{x}_1, x_2) + \frac{h_2^2}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}(x_1, \bar{x}_2).$$

Отсюда непосредственно следует доказываемое.

2) Схема повышенного порядка точности

	i_1-1	i_1	i_1+1
i_2-1	X	X	X
i_2	**X**	X	X
i_2+1	X	X	X

Используя 9-титочечный шаблон, можно построить схему, имеющую 4-й порядок аппроксимации (т.е. $\psi = O(h^4)$).
Если ввести обозначения:

$$\Lambda_1 y = y_{\bar{x}_1 x_1}, \quad \Lambda_2 y = y_{\bar{x}_2 x_2}, \quad \varphi = f + \frac{h_1^2}{12}\Lambda_1 f + \frac{h_2^2}{12}\Lambda_2 f.$$

,то её можно представить в виде:

$$\Lambda' y = \left(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12}\Lambda_1\Lambda_2\right) y = -\varphi(x), \quad x \in \omega_h,$$
$$y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma_h,$$

3) Решение разностных уравнений(Метод разделения переменных (прямой метод) для задачи Дирихле в прямоугольной области)

Задаче Дирихле соответствует система разностных уравнений, которая имеет матрицу высокого порядка $(N_1-1)(N_2-1)$. Обычно берут N_1, $N_2 \sim 50-100$, так что число уравнений в системе (1) равно 10^3-10^4. Решение систем столь высокого порядка методом Гаусса потребовало бы числа действий порядка $(N_1-1)^3(N_2-1)^3$, т. е. 10^9-10^{12} действий, если бы у системы (1) не было одного хорошего качества: матрица системы является слабо заполненной и имеет лишь $\sim 5N_1N_2$ отличных от нуля элементов. Поэтому для решения системы разностных уравнений удается построить методы, требующие $O(N \ln N)$ и даже $O(N)$ действий, где $N = (N_1-1)(N_2-1)$. Опишем один из прямых методов решения разностной задачи Дирихле уравнения Пуассона в прямоугольнике.

Перепишем задачу в виде: $\Lambda \overset{\circ}{y} = \overset{\circ}{y}_{\bar{x}_1 x_1} + \overset{\circ}{y}_{\bar{x}_2 x_2} = -\varphi(x)$, $x \in \omega_h$, $\overset{\circ}{y}|_{\gamma_h} = 0$, где $\overset{\circ}{y}(x) = y(x)$ при $x \in \omega_h$, а $\varphi(x)$ определяется по формулам:

$$\varphi = f + \frac{\mu(l_1, x_2)}{h_1^2} \text{ при } x_1 = l_1 - h_1, \quad 0 < x_2 < l_2,$$

$$\varphi = f + \frac{\mu(0, x_2)}{h_1^2}, \quad x_1 = h_1, \quad 0 < x_2 < l_2,$$

$$\varphi = f + \frac{\mu(x_1, l_2)}{h_2^2}, \quad 0 < x_1 < l_1, \quad x_2 = l_2 - h_2,$$

$$\varphi = f + \frac{\mu(x_1, 0)}{h_2^2}, \quad 0 < x_1 < l_1, \quad x_2 = h_2.$$

Ее решение можно найти методом разделения переменных. Пусть $\{v_{k_2}^{(2)}(x_2), \lambda_{k_2}^{(2)}\}$ $(k = 1, 2, \ldots, N_2 - 1)$ — собственные функции и собственные значения задачи

$$\Lambda_2 v + \lambda v = 0, \; x \in \omega_h; \; v(0) = v(l_2) = 0.$$

Выражения для $\lambda_{k_2}^{(2)}$ и $v_{k_2}^{(2)}(x_2)$ даны в п. 6, § 1.

Разложим решение $\overset{\circ}{y}(x_1, x_2)$ и правую часть $\varphi(x_1, x_2)$ по собственным функциям $\{v_{k_2}^{(2)}\}$:

$$\overset{\circ}{y}(x_1, x_2) = \sum_{k_2=1}^{N_2-1} c_{k_2}(x_1)\, v_{k_2}(x_2), \qquad (*)$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \varphi_{k_2}(x_1)\, v_{k_2}(x_2),$$

где $x_\alpha = i_\alpha h_\alpha$, $i_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1$, $\alpha = 1, 2$, $c_{k_2}(x_1)$ и $\varphi_{k_2}(x_1)$ — коэффициенты Фурье, например,

$$\varphi_{k_2}(x_1) = \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_2 \varphi(x_1, i_2 h_2)\, v_{k_2}(i_2 h_2).$$

Применим оператор $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ к произведению $c_{k_2} v_{k_2}$:

$$\Lambda c_{k_2}(x_1)\, v_{k_2}(x_2) =$$
$$= v_{k_2}(x_2)\, \Lambda_1 c_{k_2}(x_1) + c_{k_2}(x_1)\, \Lambda_2 v_{k_2}(x_2) =$$
$$= v_{k_2}(x_2)\, \Lambda_1 c_{k_2}(x_1) - \lambda_{k_2}^{(2)} c_{k_2}(x_1)\, v_{k_2}(x_2) =$$
$$= \left[\Lambda_1 c_{k_2}(x_1) - \lambda_{k_2}^{(2)} c_{k_2}(x_1)\right] v_{k_2}(x_2).$$

Учитывая это выражение, получаем:

$$\sum_{k_2=1}^{N_2-1}\left\{\Lambda_1 c_{k_2}(x_1)-\lambda_{k_2}^{(2)} c_{k_2}(x_1)+\varphi_{k_2}(x_1)\right\} v_{k_2}(x_2)=0. \quad (**)$$

В силу ортогональности $\{v_{k_2}(x_2)\}$ это тождество возможно только при равенстве нулю выражения в фигурных скобках:

$$\Lambda_1 c_{k_2}(x_1)-\lambda_{k_2}^{(2)} c_{k_2}(x_1)=-\varphi_{k_2}(x_1), \quad k_2=1,2,\ldots,N_2-1,$$

$$x_1=i_1 h_1, \quad 0<i_1<N_1, \quad c_{k_2}(i_1 h_1)=0, \quad i_1=0, N_1.$$

В самом деле, умножая (**) скалярно на $v_{k_2}(x_2)$, имеем

$$0=\sum_{k=1}^{N_2-1}\{\cdot\}_k (v_{k_1} v_{k_2})=\sum_{k=1}^{N_2-1}\{\cdot\}_k \delta_{kk_2}=\{\cdot\}_{k_2}=0, \quad (***)$$

где $\{\cdot\}_{k_2}$ — содержимое фигурной скобки (**).

Задачи(***)решаются методом прогонки; всего требуется N_2-1 раз использовать алгоритм прогонки для $k_2=1, 2, \ldots, N_2-1$. Зная $c_{k_2}(x_1)$, найдем по**1**формуле (*) решение задачи. Для этого надо сначала вычислить коэффициенты Фурье $\varphi_{k_2}(x_1)$ $(k_2=1,2,\ldots,N_2-1)$. Из формул (*) видно, что $y(x_1, x_2)$ и $\varphi_{k_2}(x_1)$ вычисляются по формулам одного и того же вида:

$$w_i=\sum_{k=1}^{N-1}\alpha_k \sin\frac{k\pi i}{N}, \quad i=1,2,\ldots,N-1. \quad (\$)$$

Разработан специальный алгоритм быстрого преобразования Фурье для вычисления сумм, который позволяет вычислить сумму ($) за $5N\log_2 N$ арифметических действий (при $N=2^n$, n — целое число) вместо $O(N^2)$ при обычном способе суммирования. Этот алгоритм позволяет найти решение исходной задачи (2) за $O(N_1 N_2 \log_2 N_2)$ действий. Метод разделения переменных можно комбинировать с методом редукции или декомпозиции, являющимся модификацией метода Гаусса. В результате получим алгоритм с числом действий $Q\approx 5N_1 N_2 \log_2 N_2$, что в два раза меньше, чем для алгоритма разделения, приведенного выше.

Решение многомерных задач теплопроводности

Постановка задачи:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = LU + f(x_1, x_2, t), \qquad LU = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}$$

Рассмотрим его решение в прямоугольнике $0 < x_1 < l_1$, $0 < x_2 < l_2$, 0<t<T с граничными условиями $U|_\Gamma = \mu(x, t)$ и начальным условием U(x,0)=U_0(x).

Для её решения введём сетки:

$$\overline{\omega}_h = \{x_1 = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}):\ x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha,\quad i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha,\ h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha, \quad \alpha = 1, 2\}$$

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau:\ 0 \leqslant t_j \leqslant T\}$$

Аппроксимировав оператор Лапласа L оператором Λ(см. стр 1), заданном на пятиточечном шаблоне, получим следующую схему с весами:

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda\left(\sigma y^{j+1} + (1-\sigma)\, y^j\right) + \varphi^j, \qquad j = 0, 1, \ldots,$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x = (i_1 h_1, i_2 h_2) \in \overline{\omega}_h, \quad y(x_i, t) = \mu_i(t), \qquad x \in \gamma_h,\ t = j\tau \in \omega_h.$$

$$\text{где}\quad y^j = y(x_i, t_j) = y(i_1 h_1, i_2 h_2; t_j), \quad x = (i_1 h_1, i_2 h_2) \in \omega_h.$$

Обозначив $\hat{y} = y^{j+1}$, $y = y^j$, можем подробнее написать:

$$\sigma\gamma_1\left(\hat{y}_{i_1-1,i_2} + \hat{y}_{i_1+1,i_2}\right) - \left(1 + 2\sigma(\gamma_1+\gamma_2)\right)\hat{y}_{i_1 i_2} + \sigma\gamma_2\left(\hat{y}_{i_1 i_2-1} + \hat{y}_{i_1 i_2+1}\right) = -F_{i_1 i_2},$$

где

$$y_{i_1 i_2} = y(i_1 h_1, i_2 h_2), \quad \gamma_1 = \tau/h_1^2, \quad \gamma_2 = \tau/h_2^2,$$

$$F_{i_1 i_2} = \left(1 - 2(1-\tau)(\gamma_1+\gamma_2)\right) y_{i_1 i_2} + (1-\sigma)\gamma_1\left(y_{i_1-1,i_2} + y_{i_1+1,i_2}\right) + (1-\sigma)\gamma_2\left(y_{i_1,i_2-1} + y_{i_1,i_2+1}\right) + \varphi_{i_1 i_2},$$

$$\hat{y}_{i_1 i_2} = \hat{\mu}_{i_1 i_2}, \quad x_i = (i_1 h_1, i_2 h_2) \in \gamma_h.$$

Это разностная краевая задача решается относительно $\hat{y}$ теми же методами, что и разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона.

Экономичные схемы (метод переменных направлений)

Проблема:

1)Явная схема: для определения y^{j+1} необходимо кол-во действий ~N_1N_2, но для устойчивости схемы требуется очень маленький шаг по x и t. (Напомним: под устойчивостью понимается малое изменение результата при малых изменениях начальных условий).

2) Неявная схема- устойчива. Однако число действий для определения y^{j+1} существенно больше, т.к для этого необходимо решить систему (N_1+1)(N_2+1) пятиточечных разностных уравнений.

Экономичные схемы сочетают достоинства 1) и 2). В их основе лежит **метод факторизации :**

Пусть дана разностная схема:

$$B\frac{y^{j+1}-y^j}{\tau}+Ay^j=\varphi^j, \quad j=0,1,\ldots, y^0=y(0)$$

Оператор B (матрица B) называется факторизованным (и соответственно схема называется факторизованной), если $B=B_1B_2B_3\ldots$

Если для решения задачи.

$$B_\alpha v=F_\alpha, \quad \alpha=1,2,$$

с заданной правой частью F_α требуется $O(N_1N_2)$ число действий, то и для определения y^{j+1} по известному y^j надо $O(N_1N_2)$ действий (оператор B «экономичен»). Так как

$$By^{j+1}=B_1B_2y^{j+1}=F^j,$$

то алгоритм сводится к последовательному решению уравнений

$$B_1y^{j+1/2}=F^j, \quad B_2y^{j+1}=y^{j+1/2}.$$

Одной из разновидностей таких схем является метод переменных направлений.

Приведем формулы метода переменных направлений (продольно-поперечной *схемы Писмена — Рекфорда*) для задачи (1) с оператором L: $Lu=L_1u+L_2u$, где L_α — один из операторов:

$$L_\alpha u=\frac{\partial^2u}{\partial x_\alpha^2} \text{ или } L_\alpha u=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \quad \alpha=1,2.$$

Пусть Λ_2, Λ_2 — соответствующие трехточечные операторы и $\Lambda=\Lambda_1+\Lambda_2$. Вводя промежуточное значение $\bar y=y^{j+1/2}$, формулируем разностную схему переменных направлений:

$$\frac{y^{j+1/2}-y^j}{\tau/2}=\Lambda_1y^{j+1/2}+\Lambda_2y^j+\varphi^j, \quad x\in\omega_h, \quad y^{j+1/2}=\bar\mu$$

$$\text{при } i_1=0,\ N_1,$$

$$\frac{y^{j+1}-y^{j+1/2}}{\tau/2}=\Lambda_1y^{j+1/2}+\Lambda_2y^{j+1}+\varphi^j, \quad x\in\omega_h, \quad y^{j+1}=\mu^{j+1}$$

$$\text{при } i_2=0,\ N_2,\ y^0=u_0(x),\ x\in\bar\omega_h,$$

где $\bar\mu$ — промежуточное значение функции $\mu(x,t)$, равное

$$\bar\mu=\frac{\mu^j+\mu^{j+1}}{2}-\frac{\tau}{4}\Lambda_2(\mu^{j+1}-\mu^j).$$

Для определения $y^{j+1/2}$ и y^{j+1} имеем разностные краевые задачи

$$^1/_2\tau\Lambda_1y^{j+1/2}-y^{j+1/2}=-F^j,$$

$$F^j=y^j+1/2\tau(\Lambda_2y^j+\varphi^j), \quad x\in\omega_h,$$

$$y^{j+1/2}=\bar\mu, \quad i_1=0,\ N_1,$$

$$^1/_2\tau\Lambda_2y^{j+1}-y^{j+1}=-F^{j+1/2},$$

$$F^{j+1/2} = y^{j+1/2} + {}^1\!/_2\tau(\Lambda_1 y^{j+1/2} + \varphi^j), \quad x \in \omega_h,$$

$$y^{j+1} = \mu^{j+1}, \quad i_2 = 0, N_2.$$

Первая задача решается прогонкой по строкам ($i_2 = 1, 2, \ldots, N_2 - 1$), вторая — прогонкой по столбцам ($i_1 = 1, 2, \ldots, N_1 - 1$). Число действий на один узел конечно и не зависит от сетки.

Схема (3) устойчива как по начальным данным, так и по правой части при любых τ и $|h|$ и имеет точность $O(\tau^2 + |h|^2)$.