Уравнения Лагранжа и Гамильтона на примере задачи навигации на орбите.

Классическая функция Лагранжа механической системы определяется так:

$$\mathfrak{L}[t, x, \dot{x}] = E_k[t, x, \dot{x}] - U[t, x, \dot{x}],$$

где Ek и U — кинетическая и потенциальная энергия системы.

Здесь x и $\dot{X}$ —координаты и скорости, причём не обязательно декартовые, а вообще говоря, т.н. обобщённые координаты, т.е координаты, получаемые из исходных декартовых координат с помощью произвольной взаимно однозначной замены переменных.

Зная функцию Лагранжа, можно описать динамику системы, составив уравнения Лагранжа:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha}\mathfrak{L}\right) - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\mathfrak{L} = F_\alpha}$$

Здесь F_α — обобщённые непотенциальные силы.
Смысл введения: уравнения не меняют своего вида при перехоле от одних обобщённых координат к другим. В новых координатах решения может стать более простым. При этом в новых координатах вместо F_α в правой части будет стоять

$$\boxed{Q_\alpha[X] = \sum_\beta F_\beta[x]\ \frac{\partial x_\beta(X)}{\partial X_\alpha}}$$

Запишем функцию Лагранжа для свободного движения космического аппарата (спутника), находящегося в поле тяготения 2системы 3-х тел: Земли и Луны. Начало координат выберем в центре масс системы Земля-Луна. Поскольку масса спутника мала по сравнению с массами планет, то его влиянием на их движение пренебрегаем. Функцию Лагранжа запишем в полярных координатах {R,ψ} спутника.
Обозначим $\{r_1\ \varphi_1\}$-координаты Земли, $\{r_1\ \varphi_1\}$-Луны, ($r_1=r_{(\text{Земля-Луна})}m_2/(m_1+m_2)$; $r_2=r_{(\text{Земля-Луна})}\, m_1/(m_1+m_2)$). Тогда:

$$E_k(t) = \frac{1}{2}\mu\left(R'(t)^2 + R(t)^2\psi'(t)^2\right)$$

$$U(t) = -\frac{\gamma\mu m_1}{S1(t)} - \frac{\gamma\mu m_2}{S2(t)},$$

где

$$S1[t] = \sqrt{R[t]^2 + r_1[t]^2 - 2\,(R[t]\, r_1[t])\, \mathrm{Cos}[\psi[t] - \varphi_1[t]]};$$

$$S2[t] = \sqrt{R[t]^2 + r_2[t]^2 - 2\,(R[t]\, r_2[t])\, \mathrm{Cos}[\psi[t] - \varphi_2[t]]};$$

$$\mathfrak{L}\left(R, \dot{R}, \psi, \dot{\psi}, t\right) = E_k - U = \frac{\gamma\mu m_1}{S1(t)} + \frac{\gamma\mu m_2}{S2(t)} + \frac{1}{2}\mu\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\psi}^2\right)$$

С помощью функции Лагранжа вводится понятие **обобщённого импульса** на основе ледующего выражения:

$$\boxed{p_\alpha = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha}\mathfrak{L}}$$

Для нашей задачи о спутнике имеем следующие выражения для обобщённых импульсов:

:

$$P_R = \partial_{(\partial_t R(t))} \mathfrak{L} = \mu \dot{R}; \qquad P_\psi = \partial_{(\partial_t \psi(t))} \mathfrak{L} = \mu R^2 \dot{\psi}.$$

Функция Гамильтона. Является функцией времени, обобщённых координат и обобщённых импульсов. Определяется формулой:

$$\mathrm{H}[\mathrm{p},\ x] = \sum_\alpha \mathrm{p}_\alpha \dot{x}_\alpha - \mathfrak{L};$$

Фактически полная энергия системы, записанная через обобщённыех координаты и обобщённыых импульсы

Из соотношений:

$$\mathrm{d}\mathfrak{L} = \sum_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\mathfrak{L}\right) d x_\alpha + \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha}\mathfrak{L}\right) d \dot{x}_\alpha;$$

$$\mathrm{dH} = \mathrm{d}\left(\sum_\alpha \mathrm{p}_\alpha \dot{x}_\alpha - \mathfrak{L}\right) = \sum_\alpha \left(\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha}\mathfrak{L}\right) d\dot{x}_\alpha + \dot{x}_\alpha d p_\alpha\right) - \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\mathfrak{L}\right) d x_\alpha + \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha}\mathfrak{L}\right) d \dot{x}_\alpha\right) =$$

$$\sum_\alpha \left(\dot{x}_\alpha \mathrm{d}\,\mathrm{p}_\alpha - \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\mathfrak{L}\right) d x_\alpha\right) = \sum_\alpha \left(\mathrm{p}_\alpha \mathrm{d}\dot{x}_\alpha + (-\dot{p}_\alpha + \mathrm{F}_\alpha)\, d x_\alpha\right) = \mathrm{dH};$$

получаем **уравнения гамильтоновой динамики:**

$$\boxed{\dot{x}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha};\ \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha} + F_\alpha;}$$

Для нашей задачи о спутнике получаем следующий гамильтониан:

$$\boldsymbol{H[t] = P_R[t]\,\partial_t R[t] + P_\psi[t]\,\partial_t \psi[t] - \mathfrak{L}[t] =}$$

$$\frac{2\gamma\left(-\frac{m_1}{\sqrt{R(t)^2 - 2\cos(\psi(t)-\varphi_1(t))\,r_1(t)\,R(t) + r_1(t)^2}} - \frac{m_2}{\sqrt{R(t)^2 - 2\cos(\psi(t)-\varphi_2(t))\,r_2(t)\,R(t) + r_2(t)^2}}\right)\mu^2 + P_R(t)^2 + \frac{P_\psi(t)^2}{R(t)^2}}{2\mu}$$

В результате получаем следующие ур-я Гамильтона:

$$\dot{R} = \frac{P_R(t)}{\mu}$$

$$\dot{\psi} = \frac{P_\psi(t)}{\mu R(t)^2}$$

<u>(!!! — при R->0 стремится к бесконечности – ПЛОХО)</u>

$$\dot{P}_R = -\frac{1}{2\mu}\left(\gamma\mu^2\left(\frac{2 m_1 (R(t) - \cos(\psi(t)-\varphi_1(t))\, r_1(t))}{(R(t)^2 - 2\cos(\psi(t)-\varphi_1(t))\, r_1(t)\, R(t) + r_1(t)^2)^{3/2}} + \right.\right.$$

$$\dot{R} = \frac{P_R(t)}{\mu} \qquad \left.\left.\frac{2 m_2 (R(t) - \cos(\psi(t)-\varphi_2(t))\, r_2(t))}{(R(t)^2 - 2\cos(\psi(t)-\varphi_2(t))\, r_2(t)\, R(t) + r_2(t)^2)^{3/2}}\right) - \frac{2 P_\psi(t)^2}{R(t)^3}\right)$$

$$\dot{\psi} = \frac{P_\psi(t)}{\mu R(t)^2} \qquad \dot{P}_\psi = -\gamma \mu R(t) \left(\frac{\sin(\psi(t) - \varphi_1(t))\, m_1 r_1(t)}{(R(t)^2 - 2\cos(\psi(t) - \varphi_1(t))\, r_1(t) R(t) + r_1(t)^2)^{3/2}} + \frac{\sin(\psi(t) - \varphi_2(t))\, m_2 r_2(t)}{(R(t)^2 - 2\cos(\psi(t) - \varphi_2(t))\, r_2(t) R(t) + r_2(t)^2)^{3/2}} \right)$$

Чтобы охватить область R→0, необходимо иначе ввести обобщённые координаты. В качестве примера и заодно чтобы ещё раз продемонстрировать технику вывода уравнений выберем в качестве обобщённых координат декартовы координаты спутника X и Y. Тогда имеем:

$$E_k[t] = \frac{1}{2}\mu\left(X'(t)^2 + Y'(t)^2\right)$$

$$U[t] = -\frac{\gamma m_1 \mu}{S1[t]} - \frac{\gamma m_2 \mu}{S2[t]} = -\frac{\gamma \mu m_1}{\sqrt{(X(t) - \cos(\varphi_1(t))\, r_1(t))^2 + (Y(t) - \sin(\varphi_1(t))\, r_1(t))^2}} - \frac{\gamma \mu m_2}{\sqrt{(X(t) - \cos(\varphi_2(t))\, r_2(t))^2 + (Y(t) - \sin(\varphi_2(t))\, r_2(t))^2}},$$

где

$$S1[t] = \sqrt{(X[t] - r_1[t]\,\mathrm{Cos}[\varphi_1[t]])^2 + (Y[t] - r_1[t]\,\mathrm{Sin}[\varphi_1[t]])^2};$$

$$S2[t] = \sqrt{(X[t] - r_2[t]\,\mathrm{Cos}[\varphi_2[t]])^2 + (Y[t] - r_2[t]\,\mathrm{Sin}[\varphi_2[t]])^2}$$

В результате для ф-и Лагранжа получаем выражение:

$$\mathfrak{L}[t] = E_k[t] - U[t] = \frac{\gamma \mu m_1}{\sqrt{(X(t) - \cos(\varphi_1(t))\, r_1(t))^2 + (Y(t) - \sin(\varphi_1(t))\, r_1(t))^2}} + \frac{1}{2}\mu\left(X'(t)^2 + Y'(t)^2\right) + \frac{\gamma \mu m_2}{\sqrt{(X(t) - \cos(\varphi_2(t))\, r_2(t))^2 + (Y(t) - \sin(\varphi_2(t))\, r_2(t))^2}}$$

Дифференцируя ф-ю Лагранжа, получаем выражение для обобщённых импульсов:

$$P_X[t] = \partial_{\partial_t X[t]} \mathfrak{L}[t] = \mu X'(t)$$

$$P_Y[t] = \partial_{\partial_t Y[t]} \mathfrak{L}[t] = \mu Y'(t)$$

(естественно, в данном случае они совпадают с обычными импульсами)

Гамильтониан системы принимает вид:

$$H[X, Y, P_X, P_Y] = P_X[t]\,\partial_t X[t] + P_Y[t]\,\partial_t Y[t] - \mathfrak{L}[t] = \frac{P_X^2 + P_Y^2}{2\mu} - \frac{\gamma \mu m_1}{\sqrt{(X - \cos(\varphi_1(t))\, r_1(t))^2 + (Y - \sin(\varphi_1(t))\, r_1(t))^2}} - \frac{\gamma \mu m_2}{\sqrt{(X - \cos(\varphi_2(t))\, r_2(t))^2 + (Y - \sin(\varphi_2(t))\, r_2(t))^2}}$$

В результате получаем следующие ур-я Гамильтона:

$$\dot{X} = \partial_{P_X[t]} H[t] = \frac{P_X(t)}{\mu} \qquad \dot{Y} = \partial_{P_X[t]} H[t] = \frac{P_Y(t)}{\mu}$$

$$\dot{P}_X = -\partial_{X[t]} H[t] = -\gamma\,\mu \left(\frac{m_1 (X(t) - \cos(\varphi_1(t))\, r_1(t))}{((X(t) - \cos(\varphi_1(t))\, r_1(t))^2 + (Y(t) - \sin(\varphi_1(t))\, r_1(t))^2)^{3/2}} + \frac{m_2\, (X(t) - \cos(\varphi_2(t))\, r_2(t))}{((X(t) - \cos(\varphi_2(t))\, r_2(t))^2 + (Y(t) - \sin(\varphi_2(t))\, r_2(t))^2)^{3/2}} \right)$$

$$\dot{P}_Y = -\partial_{Y[t]} H[t] = -\gamma\,\mu \left(\frac{m_1 (Y(t) - \sin(\varphi_1(t))\, r_1(t))}{((X(t) - \cos(\varphi_1(t))\, r_1(t))^2 + (Y(t) - \sin(\varphi_1(t))\, r_1(t))^2)^{3/2}} + \frac{m_2\, (Y(t) - \sin(\varphi_2(t))\, r_2(t))}{((X(t) - \cos(\varphi_2(t))\, r_2(t))^2 + (Y(t) - \sin(\varphi_2(t))\, r_2(t))^2)^{3/2}} \right)$$

Легко проверить, что эти выражения совпвдают с соответствующими уравнениями, получаемыми непосредственно из законов Ньютона.